

# 基于 WFRFT 频谱预编码的 GFDM 系统性能优化方法

王震铎<sup>1</sup>, 王朝晖<sup>1</sup>, 张若愚<sup>2</sup>

(1. 哈尔滨工程大学信息与通信工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150001;

2. 南京理工大学近程射频感知芯片与微系统教育部重点实验室, 江苏 南京 210094)

**摘要:** 针对广义频分复用 (GFDM) 系统在实际应用中仍然面临着带外功率泄漏和峰均功率比较高的问题, 通过深入分析频谱预编码 GFDM 系统功率谱特性, 构建了一种基于加权分数傅里叶变换 (WFRFT) 的通用频谱预编码 (SP) 框架, 提出了二维参数可调的 WFRFT-SP-GFDM 系统。通过参数的灵活配置, 可使该 WFRFT 频谱预编码器逼近加权分数傅里叶变换矩阵, 实现对带外功率和峰均功率比的精确控制。仿真结果表明, 与 GFDM 和 WFRFT-GFDM 波形相比, WFRFT-SP-GFDM 波形可以有效抑制系统带外功率泄漏, 同时保持较好的峰均功率比和误码率性能。

**关键词:** 广义频分复用; 加权分数傅里叶变换; 频谱预编码; 带外功率; 峰均功率比

**中图分类号:** TN911

**文献标志码:** A

**DOI:** 10.11959/j.issn.1000-436x.2023167

## Performance optimization method of GFDM system based on WFRFT spectral precoding

WANG Zhenduo<sup>1</sup>, WANG Zhaohui<sup>1</sup>, ZHANG Ruoyu<sup>2</sup>

1. School of Information and Communication Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China

2. Key Laboratory of Near-Range RF Sensing ICs & Microsystems (Nanjing University of Science and Technology), Ministry of Education, Nanjing 210094, China

**Abstract:** Generalized frequency division multiplexing (GFDM) system always faces challenges related to out-of-band (OOB) power leakage and a high peak-to-average power ratio (PAPR). Through an in-depth analysis of power spectrum characteristics of spectrally precoded GFDM systems, a universal spectral precoding (SP) framework based on the weighted fractional Fourier transform (WFRFT) was established. A two-dimensional parameter-adjustable WFRFT-SP-GFDM system was introduced. By flexibly configuring the parameters, the WFRFT spectral precoder could be made to approximate the weighted fractional Fourier transform matrix, achieve precise control over OOB power and PAPR. Simulation results indicate that, when compared to conventional GFDM and WFRFT-GFDM waveforms, the WFRFT-SP-GFDM waveform effectively suppresses OOB power leakage, while maintaining favorable PAPR and bit error rate (BER) performance.

**Keywords:** GFDM, WFRFT, spectral precoding, OOB, PAPR

收稿日期: 2023-05-18; 修回日期: 2023-08-07

通信作者: 王震铎, zhenduowang@hrbeu.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.62001138, No.62201266); 黑龙江省自然科学基金资助项目 (No.LH2021F009); 江苏省自然科学基金资助项目 (No.BK20210335); 中国博士后科学基金资助项目 (No.2020M670885)

**Foundation Items:** The National Natural Science Foundation of China (No.62001138, No.62201266), The Natural Science Foundation of Heilongjiang Province (No.LH2021F009), The Natural Science Foundation of Jiangsu Province (No.BK20210335), China Postdoctoral Science Foundation Funded Project (No.2020M670885)

## 0 引言

随着科学技术的不断发展,通信的意义和内涵不断演变。太赫兹通信、通信感知一体化和智能超表面<sup>[1-2]</sup>等通信技术也迎来了蓬勃发展。智能制造、智慧医疗、智能家居、智慧城市等新兴业务场景的不断涌现,推动了通信、人工智能、大数据、图像处理和遥感等技术的深度融合<sup>[3-4]</sup>。从 1G 的语音通信到如今 5G 的万物互联,通信场景正在向多元化的方向发展<sup>[5]</sup>。国际电信联盟明确了 5G 通信的三大应用场景<sup>[6-9]</sup>,包括增强型移动宽带(eMBB, enhanced mobile broadband)、大连接物联网(mMTC, massive machine-type communication)以及低时延高可靠通信(URLLC, ultra-reliable & low-latency communication)。然而当今广泛使用的正交频分复用(OFDM, orthogonal frequency division multiplexing)技术难以满足上述应用场景对通信波形更加严格的要求,作为 5G 候选波形的广义频分复用(GFDM, generalized frequency division multiplexing)由于具有更加灵活、高效的优点,成为当前研究的热点。

GFDM 是一种基于时频资源块的非正交多载波调制方案,每个时频资源单位由若干个子符号和子载波构成<sup>[10]</sup>。GFDM 系统具有良好的时频聚焦特性,能够在多径环境下提供较好的抗干扰性能和频谱利用率<sup>[11]</sup>,是一种适于物联网、无线电视、卫星通信等领域的调制方式。由于时频资源配置的灵活性,GFDM 可以很容易地实现与正交频分复用(OFDM)的兼容,并且支持多个用户共享物理层资源。从某种意义上说,GFDM 可以视作一种编码 OFDM 技术。另外,在 GFDM 中,多个子符号共用一个循环前缀(CP, cyclic prefix),节省了频带资源,提升了 GFDM 系统的频带利用率。此外,文献[12]表明正交时频空(OTFS, orthogonal time frequency space)可以作为具有简单排列的 GFDM 信号进行处理。通过正确选择设计 GFDM 参数,可以合成 OFDM 和 OTFS 等波形。因此以 GFDM 系统为研究对象对其他波形技术有一定的参考价值。

为了提高 GFDM 系统的性能,减少对相邻信道的干扰以及推进 GFDM 技术与物联网、车联网的融合,研究人员一直在深入探究抑制 GFDM 系统带外(OOB, out of band)功率泄漏和降低 GFDM 系统的峰均功率比(PAPR, peak to average power ratio)等

相关问题。针对 OOB 问题,文献[13]通过对传统的基于向量的 GFDM 系统表征深入研究,提出了一种基于矩阵化表征的 GFDM 发射机模型,指出了 GFDM 系统 OOB 性能与原型滤波器的联系,并为设计最优滤波器提供了参考。文献[14]通过将 GFDM 发射信号的功率谱密度表示为 GFDM 滤波器系数的函数,将最小化 OOB 问题转化为滤波器设计问题,权衡了误码率(BER, bit error rate)性能和 OOB 性能。文献[15]利用二次规划方法对原型滤波器加以设计优化以有效抑制 GFDM 系统的带外功率。除此之外,文献[16-18]通过 GFDM 与索引调制相结合,利用不同子载波的激活状态从而达到降低带外辐射、提高功率放大器效率和频谱效率的效果。针对 PAPR 问题,文献[19]通过对 GFDM 系统 PAPR 性能的理论性能的分析,阐明了滤波器优化 PAPR 性能所能达到的限制。文献[20]设计了一种基于梯度下降法的线性预编码器,通过最小化 GFDM 信号瞬时功率的方差、二阶矩和三阶矩等统计参数来降低 PAPR,并给出了相应的优化算法。文献[21]提出了一种预编码器,通过最小化瞬时功率(IP, instantaneous power),从而降低 PAPR。文献[22]提出了一种基于小波变换的技术,可以有效提升系统 PAPR 性能。文献[23]结合选择映射(SLM, selective mapping)和部分传输序列(PTS, partial transmit sequence)等技术提出了混合沃尔什-哈达玛预编码技术,以进一步降低发射端的 PAPR。文献[24-25]通过加权分数傅里叶变换(WFRFT, weighted fractional Fourier transform)来优化 GFDM 系统 PAPR 性能。此外,文献[26-27]指出 WFRFT 在衰落信道中具有误码率性能优势。

目前,已有多篇文献独立且完整地提出了抑制 GFDM 信号的 OOB 辐射和降低 PAPR 的方案,但只有少数文献研究了两者的联合抑制问题。为了实现 GFDM 系统 OOB 和 PAPR 性能联合优化,本文基于频谱预编码(SP, spectral precoding)理论为 GFDM 系统设计了一种通用预编码器。频谱预编码是一种重要的技术手段,通过优化信号的频谱分布,实现对系统带外功率的抑制。通过研究 GFDM 系统功率谱衰减特性,给出了预编码器的具体表达式,阐述了预编码器参数对 GFDM 带外功率的影响,通过调节预编码器参数实现对 GFDM 系统带外功率的调控。在此基础上,提出了基于 WFRFT 频谱预编码的 GFDM(WFRFT-SP-GFDM)系统,

通过二维参数的灵活配置，实现了带外功率、峰均功率比、误码率等性能的综合优化。

## 1 系统模型

### 1.1 GFDM 模型

GFDM 系统是一种针对时频资源进行调制的多载波传输系统，考虑一个具有  $K$  个子载波和  $M$  个子符号的 GFDM 系统，发射端信源提供的比特信息通过正交幅度调制 (QAM, quadrature amplitude modulation) 得到码元信息，一个时频资源单位内包含的  $N$  个码元信息通过  $M$  个子符号进行传输，每个子符号包含  $K$  个子载波，即  $N = KM$ 。第  $m$  个子符号上的码元信息记为  $\mathbf{d}_m = [d_{0,m}, \dots, d_{K-1,m}]^T$ 。GFDM 系统第  $k$  个子载波上的  $M$  个子符号通过原型滤波器循环卷积进行滤波，滤波后的信号经过上变频到第  $k$  个子载波，生成第  $k$  个子载波上的发射信号，通过  $K$  个子载波叠加形成的 GFDM 信号为

$$x[n] = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{m=0}^{M-1} d_{k,m} g_{k,m}[n] \quad (1)$$

其中， $d_{k,m}$  表示第  $k$  个子载波上的第  $m$  个子符号， $g_{k,m}[n] \triangleq g[\langle n - mK \rangle_N] \exp\left(\frac{j2\pi kn}{K}\right)$  由原型滤波器  $g[n]$  时频移位所得， $\langle \cdot \rangle_N$  表示模  $N$  运算， $j = \sqrt{-1}$ 。GFDM 系统常用的原型滤波器有升余弦滤波器和根升余弦滤波器。

根据式(1)，GFDM 系统调制过程的矩阵形式可以表示为

$$\mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{d} \quad (2)$$

其中， $\mathbf{d} = [d_{0,0}, \dots, d_{K-1,0}, \dots, d_{K-1,M-1}]^T$  表示待传输码元信息，矩阵  $\mathbf{A}$  为  $KM \times KM$  阶调制矩阵，表示为

$$\mathbf{A} = [\mathbf{g}_{0,0}, \dots, \mathbf{g}_{K-1,0}, \mathbf{g}_{0,1}, \dots, \mathbf{g}_{K-1,M-1}] \quad (3)$$

调制矩阵  $\mathbf{A}$  由原型滤波器经过时移和频移形成，包含 GFDM 信号调制过程中涉及的所有信号处理步骤。

### 1.2 WFRFT 模型

WFRFT 可以看作傅里叶变换的推广形式，即傅里叶变换是 WFRFT 在某种情况下的特例。阶数为  $\alpha$  的 WFRFT 定义为

$$\mathcal{F}^\alpha[x(n)] = \omega_0(\alpha)x(n) + \omega_1(\alpha)X(n) + \omega_2(\alpha)x(-n) + \omega_3(\alpha)X(-n) \quad (4)$$

其中， $x(n)$  为时域信号， $x(-n)$  为时域反转信号，

$X(n)$  为频域信号， $X(-n)$  为频域反转信号； $\omega_0(\alpha)$ 、 $\omega_1(\alpha)$ 、 $\omega_2(\alpha)$  和  $\omega_3(\alpha)$  为 WFRFT 的系数，定义为

$$\omega_\theta(\alpha) = \cos\left[\frac{(\alpha - \theta)\pi}{4}\right] \cos\left[\frac{(\alpha - \theta)\pi}{2}\right] \cos\left[\pm j \frac{3(\alpha - \theta)\pi}{4}\right] \quad (5)$$

其中， $\theta = 0, 1, 2, 3$ 。另外，由于加权系数所具有的周期性，因此加权阶数  $\alpha$  的取值范围通常为  $[0, 1]$ 。

由式(4)可得，阶数为  $\alpha$  的 WFRFT 的矩阵形式为

$$\mathbf{x}_\alpha = \mathbf{W}_\alpha \mathbf{x} \quad (6)$$

其中， $\mathbf{W}_\alpha$  为  $\alpha$  阶加权分数傅里叶变换矩阵，表示为

$$\mathbf{W}_\alpha = \omega_0(\alpha)\mathbf{I} + \omega_1(\alpha)\mathbf{F} + \omega_2(\alpha)\mathbf{F}^2 + \omega_3(\alpha)\mathbf{F}^3 \quad (7)$$

其中， $\mathbf{I}$  表示单位阵， $\mathbf{F}$  表示傅里叶变换矩阵。当阶数  $\alpha = 0$  时， $\mathbf{W}_\alpha$  简化为单位阵；当阶数  $\alpha = 1$  时， $\mathbf{W}_\alpha$  简化为傅里叶变换矩阵。

## 2 WFRFT-SP-GFDM 系统模型

WFRFT-SP-GFDM 系统框架如图 1 所示，在对时频资源进行 GFDM 调制之前，通过对每个子符号上携带的码元信息进行频谱预编码得到待传输码元信息向量  $\mathbf{d}_m \triangleq \mathbf{U} \mathbf{b}_m = [d_{0,m}, d_{1,m}, \dots, d_{K-1,m}]^T$ ，其中， $\mathbf{b}_m \triangleq [b_{0,m}, b_{1,m}, \dots, b_{S-1,m}]^T$  表示未编码前第  $m$  个子符号携带的码元信息， $\mathbf{U} \triangleq [u_{0,s}, \dots, u_{S-1,s}]$  表示预编码矩阵， $\mathbf{u}_s = [u_{0,s}, u_{1,s}, \dots, u_{K-1,s}]^T$ ，并且预编码矩阵每一列进行了归一化，即  $\mathbf{u}_s^H \mathbf{u}_s = 1$ ，定义预编码率为  $\phi = \frac{S}{K}$ 。

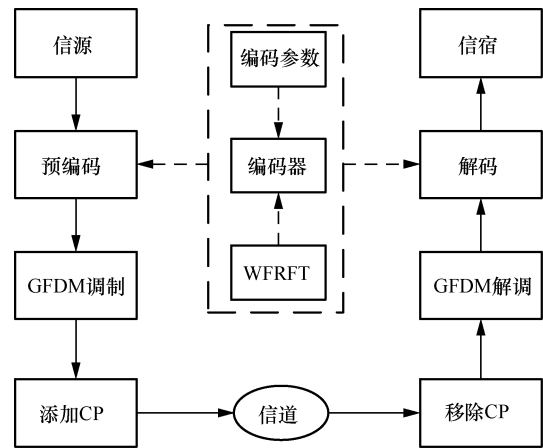


图 1 WFRFT-SP-GFDM 系统框架

在预编码之后，每个子符号通过原型滤波器  $g(t)$  进行成型滤波并上变频，经过时域叠加后得到

GFDM 信号, 在一个 GFDM 信号时间间隔  $T$  内, GFDM 信号可以表示为

$$x(t) = \sum_{m=0}^{M-1} \mathbf{d}_m^T \mathbf{e}(t) g_m(t) \quad (8)$$

其中,  $\mathbf{e}(t) \triangleq [e^{j\omega_0 t}, e^{j\omega_k t}, \dots, e^{j\omega_k t}, \dots, e^{j\omega_{K-1} t}]^T$ ,  $\omega_k = \frac{2\pi k}{T_s}$ ,  $g_m(t) \triangleq g\left(t - \frac{m}{M}T\right)$  由原型滤波器时移后形成,  $T_s$  是一个 GFDM 子符号时间间隔。通过矩阵形式可将上述 SP-GFDM 系统的调制过程表示为

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{U})\mathbf{b} \quad (9)$$

其中,  $\mathbf{I}_M$  为  $M$  阶单位阵。当预编码矩阵  $\mathbf{U}$  为单位阵时, SP-GFDM 系统简化为 GFDM 系统。

SP-GFDM 信号基带的功率谱密度可以表示为

$$P(f) = \frac{1}{T} \mathbb{E} \left\{ |\mathcal{F}\{x_T(t)\}|^2 \right\} \quad (10)$$

其中,  $x_T(t)$  是截断至  $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$  时间间隔内的发射信号,  $\mathcal{F}\{x_T(t)\}$  是发射信号的傅里叶变换, 表示为

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x_T(t)\} &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{m=0}^{M-1} \mathbf{d}_m^T \mathbf{e}(t) g_m(t) e^{-j2\pi f t} dt = \\ & \sum_{m=0}^{M-1} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathbf{d}_m^T \mathbf{e}(t) g_m(t) e^{-j2\pi f t} dt \end{aligned} \quad (11)$$

通过重复分部积分将式(11)展开为无穷级数

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x_T(t)\} &= \\ & \sum_{m=0}^{M-1} \left( -\sum_{\lambda=0}^{\infty} (j2\pi f)^{-\lambda-1} \frac{d^{(\lambda)}[\mathbf{d}_m^T \mathbf{e}(t) g_m(t)]}{dt^{(\lambda)}} e^{-j2\pi f t} \right) \Bigg|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^{(\lambda)}[\mathbf{d}_m^T \mathbf{e}(t) g_m(t)]}{dt^{(\lambda)}} = \\ & \left( j\frac{2\pi}{T} \right)^{\lambda} \sum_{m=0}^{M-1} \left\{ \sum_{l=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{l} (g_m(t))^{(\lambda-l)} \varphi_s(l) \right\} b_{s,m} \end{aligned} \quad (13)$$

其中,  $\varphi_s(l) = \sum_{k=0}^{K-1} (-1)^{Mk} u_{k,s} k^l$ 。由式(12)可知, 无穷级数中  $f^{-1}$  的系数主要取决于原型滤波器  $g(t)$  和预编码矩阵  $\mathbf{U}$ , 通过对原型滤波器和预编码矩阵加以设计, 并适当赋值可以实现 GFDM 系统带外功率的

快速衰减。为此, 给出约束条件, 对于给定的正整数  $J$ , 应满足

$$\begin{cases} \varphi_s(l) = 0, l \in \{0, 1, \dots, J-1\} \\ \varphi_s(l) \neq 0, l \in \{J, \dots, S\} \end{cases} \quad (14)$$

当满足式(14)的约束条件时, 对于任意的  $\lambda \in \{0, 1, \dots, J-1\}$ ,  $\frac{d^{(\lambda)}[\mathbf{d}_m^T \mathbf{e}(t) g_m(t)]}{dt^{(\lambda)}} = 0$ 。此时式(10)

中的  $|\mathcal{F}\{x_T(t)\}|^2$  可以表示为

$$|\mathcal{F}\{x_T(t)\}|^2 = \sum_{\lambda=J}^{\infty} v_{\lambda}(f) f^{-2J-2} \quad (15)$$

其中,  $v_{\lambda}(f)$  为

$$\begin{aligned} v_{\lambda}(f) &= \left[ \sum_{m=0}^{M-1} (j2\pi)^{-\lambda-1} \frac{d^{(\lambda)}[\mathbf{d}_m^T \mathbf{e}(t) g_m(t)]}{dt^{(\lambda)}} e^{-j2\pi f t} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\ & \left[ \sum_{m=0}^{M-1} (j2\pi)^{-\lambda-1} \frac{d^{(\lambda)}[\mathbf{d}_m^T \mathbf{e}(t) g_m(t)]}{dt^{(\lambda)}} e^{-j2\pi f t} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \end{aligned} \quad (16)$$

由式(15)可以得出, 当预编码矩阵满足约束条件时, GFDM 系统的带外功率衰减速度为  $f^{-2J-2}$  甚至更快。约束条件可以等价地改写为

$$\begin{cases} \mathbf{u}_s^T \boldsymbol{\varphi}_l^{(0)} = 0, l \in \{0, \dots, J-1\}, M \in \{2, 4, \dots\} \\ \mathbf{u}_s^T \boldsymbol{\varphi}_l^{(1)} = 0, l \in \{0, \dots, J-1\}, M \in \{1, 3, \dots\} \\ \mathbf{u}_s^T \boldsymbol{\varphi}_l^{(0)}, \mathbf{u}_s^T \boldsymbol{\varphi}_l^{(1)} \neq 0, l \in \{J, \dots, S\}, M \in \{1, 2, \dots\} \end{cases} \quad (17)$$

其中,  $\boldsymbol{\varphi}_l^{(0)}$  和  $\boldsymbol{\varphi}_l^{(1)}$  为

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varphi}_l^{(0)} = [0^l, 1^l, \dots, (K-1)^l]^T \\ \boldsymbol{\varphi}_l^{(1)} = [(-1)^0 0^l, \dots, (-1)^{K-1} (K-1)^l]^T \end{cases} \quad (18)$$

当且仅当预编码矩阵所有列属于由  $\boldsymbol{\varphi}_0^{(0)}, \dots, \boldsymbol{\varphi}_{J-1}^{(0)}$  和  $\boldsymbol{\varphi}_0^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\varphi}_{J-1}^{(1)}$  构成的正交补空间时满足上述约束条件。由于  $\boldsymbol{\varphi}_0^{(0)}, \dots, \boldsymbol{\varphi}_{J-1}^{(0)}$  和  $\boldsymbol{\varphi}_0^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\varphi}_{J-1}^{(1)}$  彼此线性无关, 因此其正交补空间的维数为  $K-2J$ , 由此可以得出预编码矩阵的隐性约束条件为  $S = K-2J$ , 即预编码率为  $\phi = 1 - \frac{2J}{K}$ 。此外, 随着预编码矩阵参数  $J$  的增大, 预编码率逐渐减小, 意味着预编码过程中加入了更多的冗余信息, 降低了

GFDM 系统的子载波利用率。预编码率反映了 GFDM 系统的子载波利用率。给出满足约束条件的预编码矩阵的一组解  $V = [\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_{S-1}]$ ， $V$  中元素表示为

$$\begin{cases} v_{s+k,s} = \rho \sum_{p=0}^k \binom{J}{k-p} \binom{J}{p} (-1)^p, k \in \{0, 1, \dots, J\} \\ v_{s+k,s} = \rho \sum_{p=k-J}^J \binom{J}{k-p} \binom{J}{p} (-1)^p, k \in \{J+1, \dots, 2J\} \\ v_{k,s} = 0, \text{其他} \end{cases} \quad (19)$$

其中， $\rho$  是确保  $\|\mathbf{v}_s\|=1$  的归一化系数。通过对  $V$  施密特正交化得到预编码矩阵  $U$ ，即  $\mathbf{u}_s = \frac{\tilde{\mathbf{v}}_s}{\|\tilde{\mathbf{v}}_s\|}$ ，其中  $\tilde{\mathbf{v}}_s$  表示为

$$\tilde{\mathbf{v}}_s = \mathbf{v}_s - \sum_{l=0}^{s-1} \frac{\mathbf{v}_s^H \tilde{\mathbf{v}}_l}{\|\tilde{\mathbf{v}}_l\|^2} \tilde{\mathbf{v}}_l \quad (20)$$

并且预编码矩阵  $U$  满足  $U^H U = I$ 。在 GFDM 系统调制传输过程中，考虑到每个子符号具有相似的谱特性，使 GFDM 波形的谱特性呈现一定的规律性。为了方便分析，假设在 GFDM 系统预编码和调制过程中，子符号携带具有独立同分布的码元信息，且满足  $E[\mathbf{b}_m] = 0$  和  $E[|\mathbf{b}_m|^2] = \sigma_d^2$ 。因此可得 SP-GFDM 系统功率谱密度的另一种表现形式为

$$\begin{aligned} P(f) &= \frac{1}{T} E\left\{|\mathcal{F}\{x_T(t)\}|^2\right\} = \\ &= \frac{1}{T} E\left\{|\mathbf{b}_m^T U^T \mathbf{G}_m(f)|^2\right\} = \\ &= \frac{\sigma_d^2}{T} \sum_{m=0}^{M-1} \mathbf{G}_m(f)^T U U^H \mathbf{G}_m(f)^* \end{aligned} \quad (21)$$

其中， $\mathbf{G}_m(f)$  是  $e(f)g_m(f)$  的傅里叶变换。作为多载波调制的一种方案，相对于单载波调制来说，GFDM 系统同样也面临着 PAPR 较大的问题。PAPR 较大时会导致功率放大器工作在非线性区域，引入了信号失真和频谱再生，影响功率谱的快速衰减。因此通过对 GFDM 系统频谱预编码，达到带外功率快速衰减的同时也要考虑对 PAPR 的抑制。为此将预编码器  $U$  扩展为预编码器  $UQ$ ，并令  $P = UQ$  简化后续表述，通过预编码器  $P$  实现对 GFDM 系统

的带外功率和峰均功率比的联合优化。通过对  $Q$  加以设计，实现降低 GFDM 系统 PAPR 的同时保持带外功率快速衰减的特性，此时 SP-GFDM 系统功率谱可以表示为

$$\begin{aligned} P(f) &= \frac{1}{T} E\left\{|\mathcal{F}\{x_T(t)\}|^2\right\} = \\ &= \frac{1}{T} E\left\{|\mathbf{b}_m^T P^T \mathbf{G}_m(f)|^2\right\} = \\ &= \frac{\sigma_d^2}{T} \sum_{m=0}^{M-1} \mathbf{G}_m(f)^T U Q Q^H U^H \mathbf{G}_m(f)^* \end{aligned} \quad (22)$$

酉矩阵具有保持信号能量的性质，它可以有效地保持信号的功率不变。当  $Q$  矩阵是酉矩阵时，其不会影响 SP-GFDM 系统带外功率的快速衰减。由式(22)也可得，当  $Q$  矩阵是酉矩阵时，其满足  $QQ^H = I$ ，此时式(22)退化为式(21)，即  $Q$  为酉矩阵时不影响 SP-GFDM 系统带外功率的快速衰减。值得注意的是，预编码矩阵  $P$  是一个  $K \times S$  的矩阵， $Q$  矩阵为  $S \times S$  矩阵，用于在不改变所得功率谱的情况下降低 GFDM 系统的 PAPR。考虑到 WFRFT 预编码矩阵为酉矩阵且具有易与 GFDM 系统结合的特性，并可以有效降低 GFDM 系统的 PAPR。因此，以此为切入点来研究  $Q$  矩阵的具体表达式。定义一个  $K \times S$  的矩阵  $\tilde{W}_\alpha$  为  $\alpha$  阶加权分数傅里叶变换矩阵  $W_\alpha$  删除前  $J$  列和最后  $J$  列的形式。为了实现降低 GFDM 系统 PAPR 的目的，将预编码矩阵逼近  $\tilde{W}_\alpha$ ，使  $\|UQ_\alpha - \tilde{W}_\alpha\|_F$  取得最小值，即约束条件为

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= \arg \min_Q \|UQ_\alpha - \tilde{W}_\alpha\|_F \\ \text{s.t. } Q_\alpha^H Q_\alpha &= I \end{aligned} \quad (23)$$

在这种情况下，GFDM 波形与 WFRFT 预编码的 GFDM 波形具有相似性，从而在带外功率快速衰减的情况下降低系统 PAPR。对约束条件进一步分析可得

$$\begin{aligned} \|UQ_\alpha - \tilde{W}_\alpha\|_F^2 &= \text{tr}((UQ_\alpha - \tilde{W}_\alpha)^H (UQ_\alpha - \tilde{W}_\alpha)) = \\ &= \text{tr}(U^H U) + \text{tr}(\tilde{W}_\alpha^H \tilde{W}_\alpha) - 2\text{tr}(\tilde{W}_\alpha^H UQ_\alpha) \end{aligned} \quad (24)$$

由式(24)可知，最小化  $\|UQ_\alpha - \tilde{W}_\alpha\|_F$  等价于最大化  $\text{tr}(\tilde{W}_\alpha^H UQ_\alpha)$ ，即约束条件等价于

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_\alpha &= \arg \max_{\mathbf{Q}} \text{tr}(\tilde{\mathbf{W}}_\alpha^H \mathbf{U} \mathbf{Q}_\alpha) \\ \text{s.t. } \mathbf{Q}_\alpha^H \mathbf{Q}_\alpha &= \mathbf{I} \end{aligned} \quad (25)$$

对  $\tilde{\mathbf{W}}_\alpha^H \mathbf{U}$  进行奇异值分解可得

$$\text{svd}(\tilde{\mathbf{W}}_\alpha^H \mathbf{U}) = \mathbf{Q}_1 \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}_2^H \quad (26)$$

由式(25)和式(26)可得优化后的结果为

$$\mathbf{Q}_\alpha = \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1^H \quad (27)$$

WFRFT-SP-GFDM 系统的矩阵表示为

$$\mathbf{x} \triangleq \mathbf{A}[\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{P}(J, \alpha)]\mathbf{b} = \mathbf{A}(\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{U} \mathbf{Q}_\alpha)\mathbf{b} \quad (28)$$

其中,  $J$  和  $\alpha$  为预编码器参数。当预编码参数取特定值时, 如表 1 所示, WFRFT-SP-GFDM 可退化为不同的波形模态, 在基于 WFRFT 的通用预编码框架下, 实现了 WFRFT-SP-GFDM、WFRFT-GFDM、SP-GFDM、GFDM 等波形体制的融合。

表 1 WFRFT-SP-GFDM 参数等效关系

预编码参数	矩阵演化	演化结果
$J=0, \alpha=0$	$\mathbf{P}=\mathbf{I}$	GFDM
$J=0, 0<\alpha<1$	$\mathbf{P}=\mathbf{W}_\alpha$	WFRFT-GFDM
$J=0, \alpha=1$	$\mathbf{P}=\mathbf{F}$	DFT-GFDM
$J \neq 0, \alpha=0$	$\mathbf{P}=\mathbf{U}$	SP-GFDM
$J \neq 0, 0<\alpha<1$	$\mathbf{P}=\mathbf{U} \mathbf{Q}_\alpha$	WFRFT-SP-GFDM
$J \neq 0, \alpha=1$	$\mathbf{P}=\mathbf{U} \mathbf{F}$	DFT-SP-GFDM

### 3 仿真结果与分析

为了验证 WFRFT-SP-GFDM 系统的性能优势, 本节对 WFRFT-SP-GFDM 系统 OOB、PAPR 和 BER 性能进行了仿真。表 2 给出了 WFRFT-SP-GFDM 系统仿真参数设定。

表 2 WFRFT-SP-GFDM 系统仿真参数设定

参数名称	参数取值
子载波数	128, 256
子符号数	5
原型滤波器	升余弦滤波器
滚降因子	0.5
调制方式	4-QAM
参数 $J$	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
参数 $\alpha$	0.6, 0.8

### 3.1 带外功率性能

为了研究 WFRFT-SP-GFDM 系统在带外功率快速衰减以及不同参数下的预编码器对带外功率影响的效果, 对 WFRFT-SP-GFDM 系统的 OOB 性能进行了仿真分析。图 2 给出了当子载波参数  $K$  分别为 128 和 256 时, 随着参数  $J$  增大, WFRFT-SP-GFDM 系统相比于 GFDM 系统在子载波利用率所承受的具体损失。

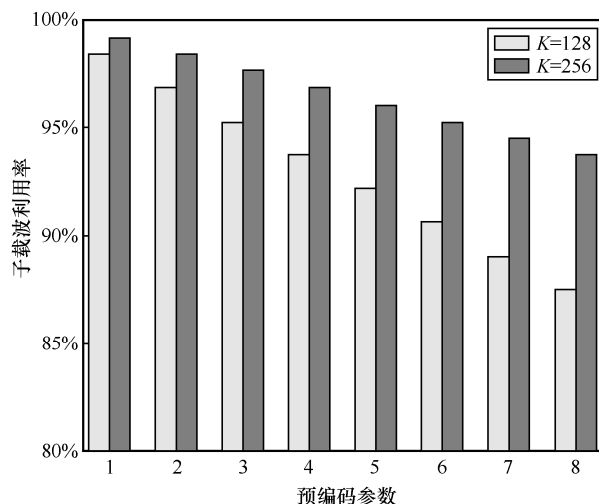


图 2 WFRFT-SP-GFDM 系统子载波利用率

如图 3 所示, 与 GFDM 系统相比, SP-GFDM 系统带外功率泄露较低, 即 SP-GFDM 系统可以实现更快的带外功率衰减, 而且参数  $J$  不同时的 SP-GFDM 系统的带外功率衰减也有差异, 即随着参数  $J$  的增大, 衰减速率加快, 证明了推导结果的正确性。如图 4 所示, 不同  $\alpha$  参数下的 SP-GFDM 系统和 WFRFT-SP-GFDM 系统的 OOB 性能基本一致, 即 WFRFT-SP-GFDM 系统 OOB 性能不受参数  $\alpha$  的影响。相同参数  $J$  下 SP-GFDM 系统和 WFRFT-SP-GFDM 系统 OOB 性能具有一致性, 验证了式(22)所指出的当  $\mathbf{Q}$  为酉矩阵时不会影响 GFDM 系统带外功率的性能。另外, 图 3 和图 4 表明, 当预编码参数  $J$  增大时, 系统使用的子载波并未减少, 仍为 128 个子载波, 即所有子载波均处于使用状态。这一结果表明, 无论预编码参数  $J$  的取值如何, 系统都能够充分利用所有子载波进行信息传输。总体而言, WFRFT-SP-GFDM 系统可以通过调节参数  $J$  来调控带外功率抑制性能, 实现带外功率抑制和子载波利用率的折中, 且比 GFDM、WFRFT-GFDM 等波形具有更低的带外功率。

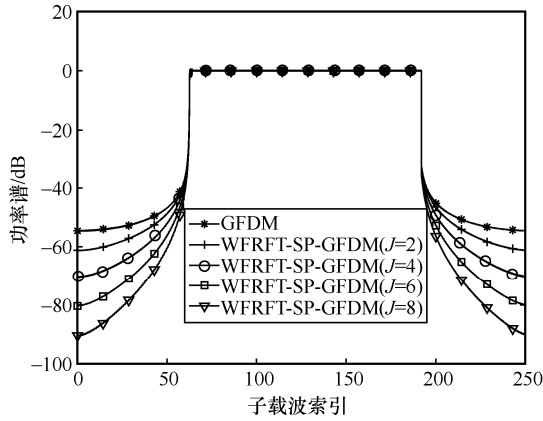


图 3 SP-GFDM 系统带外功率性能

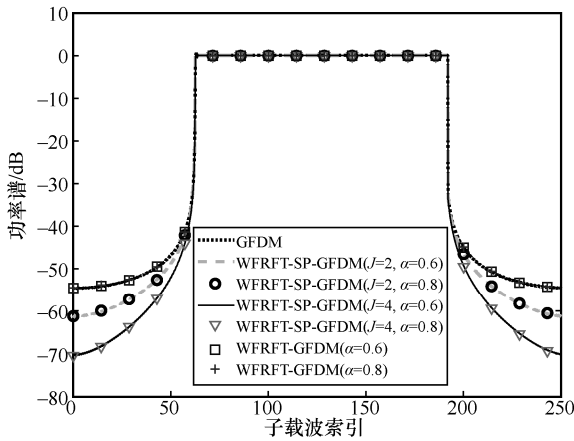


图 4 WFRFT-SP-GFDM 系统带外功率性能

### 3.2 峰均功率比性能

为了研究预编码参数对 WFRFT-SP-GFDM 系统 PAPR 性能的影响，对 WFRFT-SP-GFDM 系统 PAPR 性能进行了仿真分析，仿真过程中采用 4 倍过采样处理。

如图 5 所示，其中，横坐标  $r_0$  表示 PAPR 门限值，纵坐标 CCDF 表示系统大于对应 PAPR 门限值的概率。SP-GFDM 系统的 PAPR 性能与 GFDM 系统的 PAPR 性能相比基本一致，即  $U$  预编码对 GFDM 系统的 PAPR 性能有轻微的影响。参数  $\alpha$  相同时，不同参数  $J$  下 WFRFT-SP-GFDM 系统性能基本一致，即参数  $J$  不影响 WFRFT-SP-GFDM 系统的 PAPR 性能。参数  $J$  相同时，与 GFDM 系统相比，不同参数  $\alpha$  下 WFRFT-SP-GFDM 系统 PAPR 性能有所改变，且随着参数  $\alpha$  的增大，PAPR 抑制效果逐渐增强。结合 WFRFT-SP-GFDM 系统 OOB 性能分析，通过矩阵  $U$  和矩阵  $Q_\alpha$  分别实现了对 GFDM 系统的 OOB 性能和 PAPR 性能的调控，且两者具有不会相互作用影响的良好性质，通过调节参数  $J$  和  $\alpha$ ，实现 GFDM 系统 OOB 性能和 PAPR 性能的协

同控制。此外，当编码参数  $\alpha$  相同时，WFRFT-SP-GFDM 系统的 PAPR 性能逼近于 WFRFT-GFDM 系统 PAPR 性能。

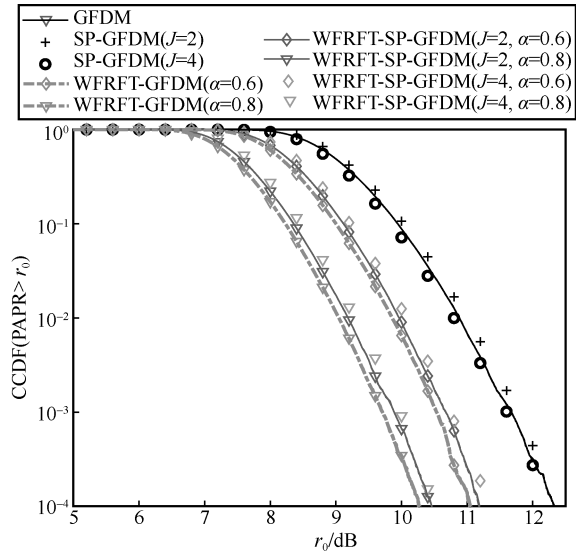


图 5 WFRFT-SP-GFDM 系统峰均功率比性能

### 3.3 误码率性能

为了探究预编码参数对 WFRFT-SP-GFDM 系统误码率的影响，对 WFRFT-SP-GFDM 系统 BER 性能进行了仿真分析。仿真中信道为 AWGN 信道和多径信道，其中，多径信道设置为 6 条径，每条径的时延设置为  $[0, 100, 150, 200, 250, 300]$  ns，每条径的平均功率设置为  $[0, -3, -6, -7.2, -10.8, -18, -25.2]$  dB。

如图 6 和图 7 所示，其中，横坐标  $E_b \cdot N_0^{-1}$  为信噪比，纵坐标 BER 为相应的误码率。AWGN 信道下，SP-GFDM 系统、WFRFT-GFDM 系统和 WFRFT-SP-GFDM 系统的 BER 性能与 GFDM 系统的 BER 性能基本一致，即在 AWGN 信道条件下，SP-GFDM 系统和 WFRFT-SP-GFDM 系统在抑制 OOB 和 PAPR 的同时不会影响系统的 BER 性能。在多径信道下，不同参数  $J$  下 SP-GFDM 系统的 BER 性能基本相同，即在多径信道下， $U$  预编码并不影响 GFDM 系统的 BER 性能。编码参数  $\alpha$  相同时，不同参数  $J$  下 WFRFT-SP-GFDM 系统的 BER 性能基本一致，即多径信道下，参数  $J$  不影响 WFRFT-SP-GFDM 系统的 BER 性能。另外，不同参数  $\alpha$  下 WFRFT-SP-GFDM 系统的 BER 性能有所不同，参数  $\alpha$  越大，BER 性能越差，即通过调节参数  $\alpha$  调控抑制 PAPR 性能的同时会导致 BER 性能发生

不同程度的恶化,抑制 PAPR 效果越强, BER 性能越差。当编码参数  $\alpha$  相同时, WFRFT-SP-GFDM 系统的 BER 性能与 WFRFT-GFDM 系统的 BER 性能具有一致性。综合考虑 OOB、PAPR 和 BER 性能,在预编码器引入的情况下,尽管子载波利用率有所下降,但系统在保持稳定的误码率性能的同时,得到了更好的带外功率和峰均功率比性能。

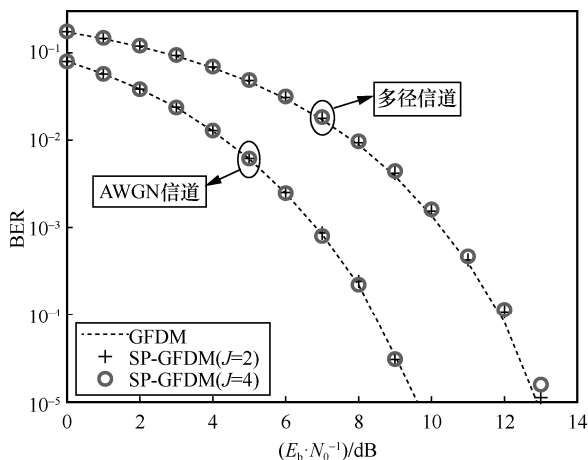


图 6 SP-GFDM 系统误码率性能

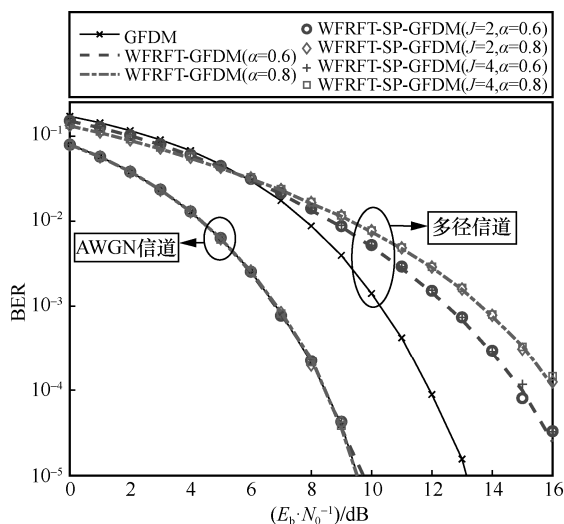


图 7 WFRFT-SP-GFDM 系统误码率性能

#### 4 结束语

本文面向通信波形的带外功率抑制需求,针对 GFDM 系统的带外功率、峰均功率比、误码率等性能的联合优化问题,提出了一种基于 WFRFT 的通用频谱预编码器。通过对 SP-GFDM 系统功率谱衰减特性的理论分析,推导了使其快速衰减的约束条件,给出了预编码矩阵的具体表达式,详细论述了

预编码参数对 GFDM 系统带外功率衰减的影响机理。在此基础上,结合 WFRFT 理论提出了 WFRFT-SP-GFDM 系统,通过二维参数的灵活配置,WFRFT-SP-GFDM 可退化为 GFDM、SP-GFDM、WFRFT-GFDM 等波形,实现了对带外功率、峰均功率比等性能的灵活调控。仿真结果表明,WFRFT-SP-GFDM 系统实现了带外功率、峰均功率比、误码率、子载波利用率等性能的联合优化,与 GFDM 波形相比,具有更低的带外功率和峰均功率比;与 WFRFT-GFDM 波形相比,在峰均功率比和误码率性能近似相同时,具有更低的带外功率性能。

#### 参考文献:

- [1] LI S, YANG L, ZHANG J Y, et al. Mixed THz/FSO relaying systems: statistical analysis and performance evaluation[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2022, 21(12): 10996-11010.
- [2] YANG L, LI P H, MENG F X, et al. Performance analysis of RIS-assisted UAV communication systems[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2022, 71(8): 9078-9082.
- [3] ZHAO C H, LIU H J, SU N, et al. TMTNet: a transformer-based multimodality information transfer network for hyperspectral object tracking[J]. Remote Sensing, 2023, 15(4): 1107.
- [4] LI Y B, DAI Q Q, TANG C R, et al. Artifact suppression of back-projection algorithm under multiple buried objects[J]. IEEE Sensors Journal, 2023, 23(7): 7253-7265.
- [5] 王晓云, 张小舟, 马良, 等. 6G 通信感知一体化网络的感知算法研究与优化[J]. 通信学报, 2023, 44(2): 219-230.
- [6] WANG X Y, ZHANG X Z, MA L, et al. Research and optimization on the sensing algorithm for 6G integrated sensing and communication network[J]. Journal on Communications, 2023, 44(2): 219-230.
- [7] NAVARRO-ORTIZ J, ROMERO-DIAZ P, SENDRA S, et al. A survey on 5G usage scenarios and traffic models[J]. IEEE Communications Surveys & Tutorials, 2020, 22(2): 905-929.
- [8] GARCIA M H C, MOLINA-GALAN A, BOBAN M T, et al. A tutorial on 5G NR V2X communications[J]. IEEE Communications Surveys & Tutorials, 2021, 23(3): 1972-2026.
- [9] POPOVSKI P, TRILLINGSGAARD K F, SIMEONE O, et al. 5G wireless network slicing for eMBB, URLLC, and mMTC: a communication-theoretic view[J]. IEEE Access, 2018, 6: 55765-55779.
- [10] 田辉, 贺硕, 林尚静, 等. 工业互联网感知通信控制协同融合技术研究综述[J]. 通信学报, 2021, 42(10): 211-221.
- [11] TIAN H, HE S, LIN S J, et al. Survey on cooperative fusion technologies with perception, communication and control coupled in industrial Internet[J]. Journal on Communications, 2021, 42(10): 211-221.
- [12] MICHAJLOW N, MATTHÉ M, GASPARI S, et al. Generalized frequency division multiplexing for 5th generation cellular networks[J]. IEEE Transactions on Communications, 2014, 62(9): 3045-3061.

- [11] 王莹, 任军, 史可, 等. 基于深度学习的广义频分复用系统时频双选择信道估计[J]. 通信学报, 2021, 42(10): 233-242.  
WANG Y, REN J, SHI K, et al. Doubly-selective channel estimation for generalized frequency division multiplexing systems based on deep learning[J]. Journal on Communications, 2021, 42(10): 233-242.
- [12] NIMR A, CHAFII M, MATTHE M, et al. Extended GFDM framework: OTFS and GFDM comparison[C]//Proceedings of IEEE Global Communications Conference (GLOBECOM). Piscataway: IEEE Press, 2019: 1-6.
- [13] CHEN P C, SU B, HUANG Y. Matrix characterization for GFDM: low complexity MMSE receivers and optimal filters[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2017, 65(18): 4940-4955.
- [14] HAN S, SUNG Y, LEE Y H. Filter design for generalized frequency-division multiplexing[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2017, 65(7): 1644-1659.
- [15] SIM Z A, JUWONO F H, REINE R, et al. Performance of GFDM systems using quadratic programming pulse shaping filter design[J]. IEEE Access, 2020, 8: 37134-37146.
- [16] CHANG Y K, UENG F B. A novel turbo GFDM-IM receiver for MIMO communications[J]. AEU - International Journal of Electronics and Communications, 2018, 87: 22-32.
- [17] ÖZTÜRK E, BASAR E, ÇIRPAN H A. Generalized frequency division multiplexing with flexible index modulation numerology[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2018, 25(10): 1480-1484.
- [18] OZTURK E, BASAR E, CIRPAN H A. Multiple-input multiple-output generalized frequency division multiplexing with index modulation[J]. Physical Communication, 2019, 34: 27-37.
- [19] LIU K M, DENG W F, LIU Y A. Theoretical analysis of the peak-to-average power ratio and optimal pulse shaping filter design for GFDM systems[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2019, 67(13): 3455-3470.
- [20] SHEIKH-HOSSEINI M, HASHEMINEJAD M, RAHDARI F. Linear precoder design for peak-to-average power ratio reduction of generalized frequency division multiplexing signal using gradient descent methods[J]. Transactions on Emerging Telecommunications Technologies, 2023, 34(2): 4698-4713.
- [21] SHARIFIAN Z, OMIDI M J, SAEEDI-SOURCK H, et al. Linear precoding for PAPR reduction of GFDMA[J]. IEEE Wireless Communications Letters, 2016, 5(5): 520-523.
- [22] BANDARI S K, VAKAMULLA V M, DROSOPOULOS A. PAPR analysis of wavelet based multitaper GFDM system[J]. AEU - International Journal of Electronics and Communications, 2017, 76: 166-174.
- [23] BANDARI S K, VAKAMULLA V M, DROSOPOULOS A. Novel hybrid PAPR reduction schemes for the MGFDM system[J]. Physical Communication, 2018, 31: 69-78.
- [24] WANG Z D, MEI L, WANG X L, et al. WFRFT precoding for generalized frequency division multiplexing[C]//Proceedings of IEEE Wireless Communications and Networking Conference. Piscataway: IEEE Press, 2016: 1-6.
- [25] WANG Z D, MEI L, SHA X J, et al. BER analysis of WFRFT precoded OFDM and GFDM waveforms with an integer time offset[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2018, 67(10): 9097-9111.
- [26] LIN X, MEI L, LABEAU F, et al. Efficient fast-convolution based hybrid carrier system[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2022, 21(5): 3508-3522.
- [27] SONG G, FANG X J, SHA X J. A robust extended hybrid carrier system for doubly selective channels[J]. IEEE Communications Letters, 2022, 26(5): 1146-1149.

#### [作者简介]



王震铎 (1989- )，男，黑龙江哈尔滨人，博士，哈尔滨工程大学副教授，主要研究方向为 5G 波形设计理论与关键技术、变换域通信系统理论、保密数据链理论与关键技术等。



王朝晖 (1998- )，男，山西大同人，哈尔滨工程大学硕士生，主要研究方向为 GFDM 波形设计理论与关键技术。



张若愚 (1992- )，男，河南三门峡人，博士，南京理工大学副研究员，主要研究方向为大规模 MIMO、通信感知一体化等。